1 Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de cet ensemble.

$x \mapsto |x^2 - x - 3|$; $x \mapsto x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$;

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $x \mapsto (|x+1| - 2)^5$; $x \mapsto \dfrac{3x^2 - |x|}{x^2 + 4}$;

$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x + 1}$; $x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\sin x - 1}$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -1, \\ 2x^2 + x & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Montrer que f est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de chacune des équations ci-dessous.

$f(x) = -3$; $f(x) = -1$; $f(x) = 0.5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 4$.

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq -2, \\ \dfrac{2x^2 - |x^3|}{x+2} & \text{si } x < -2. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en -2.
2. Etudier la continuité de f sur $]-\infty, -2[$ et sur $[-2, +\infty[$.
3. La fonction f est –elle continue sur $\mathbb{R}$?

4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ \dfrac{1 - x^3}{1 - x^2} & \text{si } -1 < x < 1. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à gauche et à droite en -1.
2. Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$, $]-1, 1[$ et $[1, +\infty[$.

5 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x - 2}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 2.

6 Dire dans chacun des cas suivants, si la fonction f admet un prolongement par continuité en a.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$, $a = 0$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$, $a = -1$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + 3x}{x}$, $a = 0$.

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2 - x - 2)}{|x|(x-2)} & \text{si } x \neq 2 \text{ et } x \neq 0, \\ 3 \quad \text{si } x = 2, \quad 2 \quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

8 Soit la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x||x-2|}{x(x^2 - x - 2)} & \text{si } x \neq 2, \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier les limites de f en -1 , $+\infty$ et $-\infty$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?